Том 29, № 145 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-86-97
УДК 517.953, 517.929.7

О решении смешанной задачи для уравнения колебаний движущегося вязкоупругого полотна

Александр Михайлович РОМАНЕНКОВ
ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4
ФИЦ «Информатика и управление» Российской академии наук
119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, 44/2

Аннотация. Рассматривается модельная начально-краевая задача малых поперечных колебаний вязкоупругого движущегося полотна с шарнирным условием закрепления. Колебания такого полотна описываются линейным дифференциальным уравнением 5-го порядка по пространственной переменной с постоянными коэффициентами. Стоит отметить, что в уравнение входят смешанные производные искомой функции как по пространственной переменной, так и по времени. В работе описан прием для построения решения в виде функционального ряда по системе базисных функций. Для решения начально-краевой задачи при дополнительном условии сохранения энергии получено условие, обеспечивающее единственность решения. Явно описан специальный класс функций, для которых выполняется теорема единственности.

Ключевые слова: линейное уравнение в частных производных, начально-краевая задача, колебания вязкоупругого полотна, точные решения краевой задачи, единственность решения

Для цитирования: *Романенков А.М.* О решении смешанной задачи для уравнения колебаний движущегося вязкоупругого полотна // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 86–97. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-86-97

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-86-97

On the solution of a mixed problem for the equation of vibrations of a moving viscoelastic web

Alexandr M. ROMANENKOV

Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoye shosse, Moscow 125993, Russian Federation
FRC "Informatics and management" of the Russian Academy of Sciences
44/2 Vavilov St., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract. A model initial boundary value problem of small transverse oscillations of a viscoelastic moving web with a hinged condition of fastening is considered. The vibrations of such a canvas are described by a linear differential equation of the 5th order in a spatial variable with constant coefficients. It is worth noting that the equation includes mixed derivatives of the desired function both with respect to the spatial variable and with respect to time. The paper describes a technique for constructing a solution in the form of a functional series based on a system of basis functions. To solve the initial-boundary value problem under the additional condition of conservation of energy, a condition is obtained that ensures the uniqueness of the solution. A special class of functions for which the uniqueness theorem holds is explicitly described.

Keywords: linear partial differential equation, initial boundary value problem, vibrations of a viscoelastic web, exact solutions of a boundary value problem, uniqueness of the solution

Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G16, 35L25, 35L35, 35L65.

For citation: Romanenkov A.M. On the solution of a mixed problem for the equation of vibrations of a moving viscoelastic web. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 86–97. https://doi. org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-86-97 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Построением и исследованием математических моделей колебаний движущихся вязкоупругих материалов занимались многие исследователи. В работе [1] рассмотрены модели, в которых учитываются вязкоупругие эффекты. В этой работе исследованы модель Кельвина–Фойгта колебаний линейной пружины с амортизатором и модель упругих колебаний вязкоупругого полотна, выведено дифференциальное уравнение колебаний этого полотна и приведены численные схемы для построения приближенного решения соответствующей начально-краевой задачи. В работах [2, 3] выполнено исследование устойчивости гармонического режима движения вязкоупругого полотна при условии погружения движущегося полотна в жидкую и воздушную среды. В работе [4] выполнена систематизация результатов моделирования движения вязкоупругих материалов при различных предположениях, проведено исследование устойчивости колебаний и рассмотрены некоторые задачи управления колебаниями. В [5] с помощью метода разложения по малому параметру и применения преобразования Фурье проведено исследование частот поперечных колебаний вязкоупругой балки и установлено существенное влияние на характер колебаний, слагаемых с производной по времени. В работе [6] с применением техники комплексных уравнений на собственные значения выполнен анализ динамических характеристик и устойчивости движения при условии наличия пьезоэлектрических слоев, с помощью численных методов построены области устойчивости и неустойчивости колебаний. Авторы работ [7, 8] рассмотрели нелинейные модели движения упругого полотна и для такого случая выполнили численный расчет областей устойчивости и неустойчивости движения.

Отметим также некоторые приложения, где возникает уравнение вязкоупругих колебаний. В статье [9] рассмотрена задача о флаттере вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей с сосредоточенными массами в геометрически нелинейной постановке. Необходимость изучения данных флаттеров обусловлена тем, что конструкции такого типа, которые изготовлены из современных композиционных материалов, используются в авиационной промышленности. А в этой области особо важными вопросами являются вопросы прочности, демпфирования колебаний и динамической устойчивости. Для решения рассматриваемой задачи в [9] предложен численный метод, который основан на методе Бубнова–Галеркина. Работы [10, 11] посвящены исследованию колебаний вязкоупругих панелей. В основе численных алгоритмов в цитируемых работах также лежит метод Бубнова–Галеркина. Отметим, что идея применения метода Бубнова–Галеркина для численного решения и исследования уравнений вязкоупругих колебаний оказывается весьма плодотворной.

Для исследования решений краевых задач широко применяются асимптотические и приближенные методы, что позволяет получить аппроксимации точного решения. Причем непосредственно явные формулы, которые определяют решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний вязко-упругого полотна, в известных источниках не приводятся. В данной работе реализован прием построения явного решения, который изложен в [12]. Стоит обратить внимание, что для исследуемой краевой задачи в общем случае закон сохранения энергии не выполняется. Рассматриваемое линейное уравнение пятого порядка по пространственной переменной содержит смешанные производные по времени и пространственной переменной. Этот факт значительно затрудняет получение решения в виде ряда Фурье по системе собственных функций некоторой краевой задачи.

1. Основные понятия

Пусть функция $u(x,t) \in C^{5,2}\left((0,l)\times[0,T]\right)$, здесь $l>0, T>0$, то есть рассматриваемая функция имеет производные до пятого порядка включительно по пространственной переменной x, производные до второго порядка включительно по t и все смешанные производные по x и t до пятого порядка включительно. А именно, определены функции $\frac{\partial^{n+k}u}{\partial x^n \partial t^k}$, где $k\in\{0,1,2\}$, $\max\limits_{n\geq 0}(n+k)=5$. Для удобства будем обозначать

$$\frac{\partial^{n+k}u}{\partial x^n \partial t^k} = u_{\underbrace{xx\ldots x}_{n}\underbrace{tt\ldots t}_{k}}.$$

Математической моделью колебаний, которые возникают при движении вязкоупругих панелей (см. [4]), является начально-краевая задача для обезразмеренного уравнения

$$u_{tt}+2cu_{xt}+\gamma\alpha u_{xxxxt}+(c^2-1)u_{xx}+\alpha u_{xxxx}+\gamma\alpha c u_{xxxxx}=0, \tag{1.1}$$

$$u|_{x=0}=u_{xx}|_{x=0}=u|_{x=l}=u_{xx}|_{x=l}=0, \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x), \qquad u_t|_{t=0}=u_1(x). \tag{1.3}$$

Здесь α — безразмерный коэффициент упругости, c — безразмерная скорость продольного движения панели с ограничением $c<1$ и γ — безразмерное время запаздывания. Далее, если иное не оговорено, везде будем считать, что u — решение исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Определим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами соотношением

$$L(\cdot)=(\cdot)_{tt}+2c(\cdot)_{xt}+\gamma\alpha(\cdot)_{xxxxt}+(c^2-1)(\cdot)_{xx}+\alpha(\cdot)_{xxxx}+\gamma\alpha c(\cdot)_{xxxxx} \tag{1.4}$$

и запишем уравнение (1.1) в операторном виде $Lu=0$. Сформулируем вспомогательное утверждение об операторе L.

Символом $(\cdot,\cdot)$ будем обозначать «обычное» скалярное произведение, определяемое, как интеграл от произведения функций.

Утверждение 1.1. *Пусть $\omega, v\in C^{5,2}\left((0,l)\times[0,T]\right)$ — функции, удовлетворяющие краевым условиям (1.2). Тогда*

$$(L\omega,v)=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\omega_{tt}v-2c\omega_t v_x+\gamma\alpha\omega_{xxt}v_{xx}-\left(c^2-1\right)\omega_x v_x+\alpha\omega_{xx}v_{xx}+\gamma\alpha c\omega_{xxx}v_{xx}\right)dxdt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применение формулы интегрирования по частям по пространственной переменной x, с учетом краевых условий (1.2), непосредственно дает требуемое соотношение. □

О п р е д е л е н и е 1.1. Функцию $E(\tau)$, определяемую соотношением

$$E(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(u_t^2(x,\tau)+(1-c^2)u_x^2(x,\tau)+\alpha u_{xx}^2(x,\tau)\right)dx, \tag{1.5}$$

будем называть энергией движущегося полотна в момент времени $\tau\geq 0$.

Энергия $E(\tau)$ обладает следующим свойством.

Утверждение 1.2. *Пусть функция $E(\tau)$ определена соотношением (1.5). Тогда при любом $\tau \geq 0$ имеет место равенство*

$$E(\tau) + \gamma\alpha \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l u_{txx} \left(u_t + cu_x\right)_{xx} \, dxdt = E(0). \tag{1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим утверждение 1.1, в котором положим $\omega = u$, $v = u_t$, $T = \tau$. Таким образом, так как $Lu = 0$, получим

$$\begin{aligned} 0 = (Lu, u_t) &= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (u_{tt}u_t - 2cu_tu_{tx} + \gamma\alpha u_{xxt}^2 - (c^2-1)u_xu_{tx} + \alpha u_{xx}u_{txx} + \gamma\alpha c u_{xxx}u_{txx})\, dxdt \\ &= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \Big(\frac{1}{2}\left(u_t^2 + \left(1-c^2\right)u_x^2 + \alpha u_{xx}^2\right)_t + \gamma\alpha u_{txx}\left(u_t + cu_x\right)_{xx}\Big) dxdt \\ &= E(\tau) - E(0) + \gamma\alpha \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l u_{txx}\left(u_t + cu_x\right)_{xx} \, dxdt. \end{aligned}$$

□

З а м е ч а н и е 1.1. Согласно доказанному предложению, закон сохранения энергии в общем случае не выполняется.

Естественно, следующим шагом выделим класс решений, который обеспечивает выполнение закона сохранения энергии.

Теорема 1.1. *Пусть решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) существует и имеет вид*

$$u(x,t) = T(t)X(x), \tag{1.7}$$

где $X(x)$ — комплекснозначная функция вещественной переменной. Тогда, если

$$\int\limits_0^l \left(X''\right)^2 dx = 0, \qquad \left(X''(l)\right)^2 - \left(X''(0)\right)^2 = 0, \tag{1.8}$$

то имеет место закон сохранения энергии, то есть $E(\tau) = E(0)$ при любом $\tau > 0$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через I интеграл в тождестве (1.6) и вычислим его. Получим

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l u_{txx}\left(u_t + cu_x\right)_{xx} \, dxdt \\ &= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left(\left((T(t)X(x))_{xxt}\right)^2 + c\left(T(t)X(x)\right)_{xxt}\left(T(t)X(x)\right)_{xxx}\right) \, dxdt \end{aligned}$$

$$= \int_0^\tau (T')^2\,dt \int_0^l (X'')^2\,dx + c\int_0^\tau TT'\,dt\int_0^l X''X'''\,dx$$

$$= \int_0^\tau (T')^2\,dt \int_0^l (X'')^2\,dx + \frac{c}{4}\left(T^2(\tau)-T^2(0)\right)\left((X''(l))^2-(X''(0))^2\right)$$

Теперь замечаем, что при выполнении условий (1.8) теоремы имеем $I=0$, что обеспечивает равенство $E(\tau)=E(0)$ для любого $\tau>0$. □

Из доказанной теоремы получаем условия единственности решения рассматриваемой начально-краевой задачи.

Следствие 1.1. *Если решение задачи (1.1)–(1.3) существует, то при выполнении условий теоремы 1.1 это решение единственно.*

Доказательство. Пусть функции $v_1(x,t), v_2(x,t)$ являются решениями задачи (1.1)–(1.3) и $v_1(x,t)\neq v_2(x,t)$. Тогда функция $u(x,t)=v_1(x,t)-v_2(x,t)$ является решением уравнения (1.1), удовлетворяет краевым условиям (1.2) и начальным условиям (1.3) с начальными значениями $u_0(x)=u_1(x)=0$. Поэтому при выполнении условий теоремы 1.1 для любого $\tau\geq 0$ выполнено $E(\tau)=E(0)$. Отсюда по формуле (1.5) получаем, что $u(x,t)=0$ и $v_1(x,t)=v_2(x,t)$. □

Свойство 1.1. Пусть $X_1(x), X_2(x)$ — вещественнозначные функции вещественной переменной. Пусть, далее, $X(x)=X_1(x)+iX_2(x)$. Тогда для выполнения условия (1.8) необходимо

$$\int_0^l \left((X_1''(x))^2-(X_2''(x))^2\right)dx + 2i\int_0^l X_1''(x)X_2''(x)\,dx = 0.$$

Пример 1.1. При $X_1(x)=\cos\frac{\pi n}{l}x$, $X_2(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x$, $n\in\mathbb{Z}$, имеем $X(x)=e^{i\frac{\pi n}{l}x}$, и условие (1.8) из теоремы 1.1 выполнено.

2. Основные результаты. Явное решение.

Теперь определим точный вид решения задачи (1.1)–(1.3). Воспользуемся подходом, предложенным в работе [12].

Пусть $u=T(t)e^{\lambda x}$. После подстановки этой функции в уравнение (1.1), сокращения на общий множитель и группировки слагаемых получаем

$$T''+(2c+\gamma\alpha\lambda^3)\lambda T'+(c^2-1+\alpha\lambda^2+\gamma\alpha c\lambda^3)\lambda^2 T=0. \qquad (2.1)$$

Уравнение (2.1) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами относительно неизвестной функции $T(t)$. Составим для этого уравнения характеристическое уравнение

$$\mu^2+(2c+\gamma\alpha\lambda^3)\lambda\mu+(c^2-1+\alpha\lambda^2+\gamma\alpha c\lambda^3)\lambda^2=0.$$

Корни этого уравнения определяются формулой

$$\mu_{1,2} = \lambda\Big(- c - \frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3 \pm \sqrt{1 - \alpha\lambda^2 + \big(\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\big)^2}\Big). \tag{2.2}$$

Рассмотрим нерезонансный случай, а именно, $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда можно выписать решение для уравнения (2.1) в виде линейной комбинации экспонент

$$T(t) = e^{\lambda\left(-c-\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\right)t}\Big(C_1 e^{\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda^2+\left(\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\right)^2}t} + C_2 e^{-\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda^2+\left(\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\right)^2}t}\Big),$$

и функция $u(x,t)$ определяется формулой

$$u(x,t) = \Big(C_1 e^{\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda^2+\left(\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\right)^2}t} + C_2 e^{-\lambda\sqrt{1-\alpha\lambda^2+\left(\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\right)^2}t}\Big) e^{\lambda\left(x-\left(c+\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\right)t\right)}. \tag{2.3}$$

Положим

$$\sigma(\lambda) = \sqrt{1 - \alpha\lambda^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\right)^2}, \tag{2.4}$$

и в частном случае при $\lambda = i\frac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\sigma_n = \sigma\Big(i\frac{\pi n}{l}\Big) = \sqrt{1 + \alpha\Big(\frac{\pi n}{l}\Big)^2\Big(1 - \frac{\alpha\gamma^2}{4}\Big(\frac{\pi n}{l}\Big)^4\Big)}. \tag{2.5}$$

С учетом обозначения (2.4) искомое решение определяется формулой

$$u(x,t) = \left(C_1 e^{\lambda\sigma(\lambda)t} + C_2 e^{-\lambda\sigma(\lambda)t}\right) e^{\lambda\left(x-\left(c+\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\right)t\right)}. \tag{2.6}$$

П р и м е р 2.1. Используя пример 1.1, по формуле (2.6) при $\lambda = i\frac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, получим

$$u(x,t) = \left(C_1 e^{-\frac{\pi n}{l}\sigma_n t} + C_2 e^{\frac{\pi n}{l}\sigma_n t}\right) e^{i\frac{\pi n}{l}\left(x-\left(c-\frac{\gamma\alpha}{2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^3\right)t\right)}.$$

Обратим внимание на выражения в показателях экспонент в примере 2.1. Заметим, что лишь конечное число значений σ_n будут вещественными, то есть существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ число $\sigma_n \in \mathbb{C}$ будет чисто мнимым. Этот факт позволяет сделать вывод о качественном поведении колебательного процесса. Для действительной части $\Re$ коэффициента при t, когда σ_n — чисто мнимое комплексное число, имеем

$$\Re\left(\lambda\sigma_n - \frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^4 - ic\lambda\right) = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\left|1 + \alpha\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\left(1 - \frac{\alpha\gamma^2}{4}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\right)\right|} - \frac{\gamma\alpha}{2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4.$$

А так как вещественная функция $G(z) = z\sqrt{\left|1 + \alpha z^2\left(1 - \frac{\alpha\gamma^2}{4}z^4\right)\right|} - \frac{\gamma\alpha}{2}z^4$ при больших значениях аргумента z положительна, то решение дифференциального уравнения содержит растущую по модулю экспоненту при увеличении аргумента t.

Далее, для уравнения (1.1) с начальными условиями экспоненциального вида построим решения в виде функционального ряда. Пусть A_1, A_2, a — некоторые числа, быть может, и комплексные. Начальные условия (1.3) определим выражениями

$$u|_{t=0} = A_1 e^{ax}, \quad u_t|_{t=0} = A_2 e^{ax}. \tag{2.7}$$

Корни характеристического уравнения (2.2) обозначим $\mu_1 = \mu_1(\lambda)$, $\mu_2 = \mu_2(\lambda)$. Согласно формуле (2.3)

$$u(x,t) = C_1 e^{\mu_1 t + \lambda x} + C_2 e^{\mu_2 t + \lambda x}.$$

Определим неизвестные параметры C_1, C_2 таким образом, чтобы условие (2.7) было выполнено. Положим $\lambda = a$. Тогда $u(x,0) = (C_1 + C_2)e^{ax}$ и $u_t(x,0) = (C_1\mu_1 + C_2\mu_2)e^{ax}$. Далее, получим систему уравнений для нахождения параметров C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = A_1 \\ C_1\mu_1 + C_2\mu_2 = A_2 \end{cases},$$

решив которую, получаем

$$C_1 = \frac{A_1\mu_2 - A_2}{\mu_2 - \mu_1}, \quad C_2 = \frac{A_2 - A_1\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Итак, решение уравнения (1.1) с начальными условиями (2.7) определяется формулой

$$u(x,t) = \frac{e^{ax}\left((A_1\mu_2(a) - A_2)e^{\mu_1(a)t} + (A_2 - A_1\mu_1(a))e^{\mu_2(a)t}\right)}{\mu_2(a) - \mu_1(a)}.$$

Если начальные условия представляют собой линейную комбинацию экспонент

$$u|_{t=0} = \sum_n A_{1n} e^{a_n x}, \quad u_t|_{t=0} = \sum_n A_{2n} e^{a_n x}, \tag{2.8}$$

то в силу линейности уравнения (1.1) решение определяется формулой

$$u(x,t) = \sum_n \frac{e^{a_n x}\left((A_{1n}\mu_2(a_n) - A_{2n})\, e^{\mu_1(a_n)t} + (A_{2n} - A_{1n}\mu_1(a_n))\, e^{\mu_2(a_n)t}\right)}{\mu_2(a_n) - \mu_1(a_n)}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим неоднородное уравнение с правой частью специального вида

$$Lu = F(t)e^{\rho x}, \tag{2.10}$$

здесь выражение Lu определяется формулой (1.4), а начальные условия (1.3) являются тривиальными

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Будем искать решение в виде $u(x,t) = T(t)e^{\rho x}$. Тогда после подстановки в (2.10) и сокращения на общий множитель получаем

$$T'' + (2c + \gamma\alpha\rho^3)\rho T' + (c^2 - 1 + \alpha\rho^2 + \gamma\alpha c\rho^3)\rho^2 T = F(t).$$

После применения стандартного метода вариации постоянных для этого неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами получаем решение

$$T(t) = \frac{1}{\mu_2(\rho) - \mu_1(\rho)} \int_0^t \left(e^{\mu_2(\rho)(t-\tau)} - e^{\mu_1(\rho)(t-\tau)}\right) F(\tau)d\tau.$$

Теперь можем написать решение уравнения (2.10)

$$u(x,t)=\frac{e^{\rho x}}{\mu_2(\rho)-\mu_1(\rho)}\int\limits_0^t\left(e^{\mu_2(\rho)(t-\tau)}-e^{\mu_1(\rho)(t-\tau)}\right)F(\tau)d\tau$$

Если же правая часть уравнения имеет вид $\sum\limits_n F_n(t)e^{\rho_n x}$, то, в силу линейности оператора L, решение определяется формулой

$$u(x,t)=\sum_n\frac{e^{\rho_n x}}{\mu_2(\rho_n)-\mu_1(\rho_n)}\int\limits_0^t\left(e^{\mu_2(\rho_n)(t-\tau)}-e^{\mu_1(\rho_n)(t-\tau)}\right)F_n(\tau)d\tau.$$

Далее, рассмотрим случай совпадения корней характеристического уравнения. Будем считать, что $\mu_1\equiv\mu_2$ и $\lambda\neq 0$. Тогда дискриминант характеристического уравнения обращается в ноль, то есть

$$1-\alpha\lambda^2+\left(\frac{\gamma\alpha}{2}\right)^2\lambda^6=0, \tag{2.11}$$

а корень характеристического уравнения равен

$$\mu=\mu(\lambda)=-\lambda\Big(c+\frac{\gamma\alpha}{2}\lambda^3\Big).$$

В этом случае функция $T(t)$ будет определяться формулой

$$T(t)=(C_1+C_2t)e^{\mu t},$$

и поэтому решением однородного уравнения (1.1) будет функция

$$u(x,t)=(C_1+C_2t)e^{\mu(\lambda)t+\lambda x}. \tag{2.12}$$

Определим решение начальной задачи для однородного уравнения (1.1) с начальными условиями (2.7), при этом предполагаем параметр a таковым, что при $\lambda=a$ выполняется условие (2.11). Тогда

$$u(x,0)=C_1e^{ax}=A_1e^{ax},\quad u_t(x,0)=(\mu C_1+C_2)e^{ax}=A_2e^{ax}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$C_1=A_1,\quad C_2=A_2-A_1\mu.$$

Подставляя найденные значения в (2.12), получаем точное решение

$$u(x,t)=(A_1+(A_2-A_1\mu(a))t)\,e^{\mu(a)t+ax}.$$

Уравнение (2.11) имеет ровно 6 комплексных корней с учетом их кратностей. Пусть все корни различны. Тогда, если начальные условия представляют собой сумму экспонент

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^6 A_{1n}e^{a_nx},\quad u_t|_{t=0}=\sum_{n=1}^6 A_{2n}e^{a_nx},$$

где a_n — корни уравнения (2.11), то аналогично (2.9) получаем

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{6}(A_{1n}+(A_{2n}-A_{1n}\mu(a_n))t)\,e^{\mu(a_n)t+a_nx}.$$

Рассмотрим далее неоднородное уравнение (2.10) с тривиальными начальными условиями. Будем считать, что ρ — корень уравнения (2.8). Применим метод вариации постоянных. Пусть

$$T(t)=(C_1(t)+C_2(t)t)e^{\mu t},$$

где

$$C_1(t)=-\int_0^t \tau F(\tau)d\tau,\quad C_2(t)=\int_0^t F(\tau)d\tau.$$

Искомая функция определяется формулой

$$u(x,t)=e^{\mu(\rho)t+\rho x}\int_0^t(t-\tau)F(\tau)d\tau.$$

Теперь, если правая часть уравнения (2.10) имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{6}F_n(t)e^{\rho_nx}$, где ρ_n — корни уравнения (2.11), то

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{6}e^{\mu(\rho_n)t+\rho_nx}\int_0^t(t-\tau)F_n(\tau)d\tau.$$

П р и м е р 2.2. Рассмотрим набор функций $X_j(x)=\sin\left(\frac{\pi j}{l}x\right)$, где $j\in\mathbb{N}$. Легко проверяется, что они удовлетворяют краевым условиям (1.2). Пусть, далее, функции в начальном условии (1.3) разлагаются в сходящийся ряд Фурье, то есть

$$u_0(x)=\sum_{j=1}^{\infty}u_{0_j}X_j(x),\quad u_1(x)=\sum_{j=1}^{\infty}u_{1_j}X_j(x),\tag{2.13}$$

где $u_{0_j}=\frac{(u_0(x),X_j(x))}{\|X_j(x)\|^2}$, $u_{1_j}=\frac{(u_1(x),X_j(x))}{\|X_j(x)\|^2}$. В силу формулы Эйлера из (2.13) получаем

$$u_0(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u_{0_j}}{2i}e^{\frac{\pi j}{l}x}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u_{0_j}}{2i}e^{-\frac{\pi j}{l}x},\quad u_1(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u_{1_j}}{2i}e^{\frac{\pi j}{l}x}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u_{1_j}}{2i}e^{-\frac{\pi j}{l}x}.$$

Для функции такого вида можно предъявить решение уравнения (1.1) в виде ряда.

В случае неоднородного уравнения (см. (2.10)), если $F(x,t)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}F_j(t)X_j(x)$, то также правую часть можно представить в виде

$$F(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_j(t)}{2i}e^{\frac{\pi j}{l}x}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_j(t)}{2i}e^{-\frac{\pi j}{l}x},$$

для которой можно предъявить частное решение $u(x,t)$.

3. Заключение.

Описанный в работе метод построения решений начально-краевых задач может быть использован для построения решений в виде рядов Фурье линейных задач математической физики, которые содержат смешанные производные по временной и пространственным переменным. Также, в дальнейшем, с использованием найденного в работе решения можно исследовать задачу оптимального управления колебаниями, возникающими в вязкоупругом полотне.

References

[1] T. Saksa, N. Banichuk, J. Jeronen, M. Kurki, T. Tuovinen, "Dynamic analysis for axially moving viscoelastic panels", *International Journal of Solids and Structures*, **49**:23–24 (2012), 3355–3366.

[2] T. Saksa, J. Jeronen, T. Tuovinen, "Stability of moving viscoelastic panels interacting with surrounding fluid. Rakenteiden Mekaniikka", *Journal of Structural Mechanics*, **45**:3 (2012), 88–103.

[3] T. Saksa, J. Jeronen, N. Banichuk, M. Kurki, "On travelling web stability including material viscoelasticity and surrounding air", *Advances in Pulp and Paper Research*, 15th Fundamental Research Symposium, Cambridge, 2013, 449–468.

[4] N. Banichuk, J. Jeronen, P. Neittaanmäki, T. Saksa, T. Tuovinen, *Mechanics of Moving Materials*. V. 207, Solid Mechanics and its Applications, Springer, Switzerland, 2014, 253 pp.

[5] H. Ding, Y.-Q. Tang, L.-Q. Chen, "Frequencies of transverse vibration of an axially moving viscoelastic beam", *Journal of Vibration and Control*, **23**:20 (2017), 3504–3514.

[6] Y. Wang, X. Cao, T. Jing, J. Wu, "Dynamic characteristics and stability of axially moving viscoelastic plate with piezoelectric layer", *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, **33**:3 (2014), 341–355.

[7] Y. Wang, X. Cao, T. Jing, J. Wu, "Transverse vibrations of an axially accelerating viscoelastic string with geometric nonlinearity", *Journal of Engineering Mathematics*, **48** (2004), 171–182.

[8] L.-Q. Chen, "Nonlinear Vibrations of Axially Moving Beams", *Nonlinear Dynamics*. V. 7, ed. T. Evans, IntechOpen Limited, United Kingdom, 2010.

[9] Б. Х. Эшматов, Х. Эшматов, Д. А. Ходжаев, "Нелинейный флаттер вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей из композиционного материала с сосредоточенными массами", *Прикладная механика и техническая физика*, **54**:4 (2013), 74–85. [B. Kh. Eshmatov, Kh. Eshmatov, D. A. Khodzhaev, "Nonlinear flutter of viscoelastic rectangular plate cylindrical panels from composite material with local masses", *Applied Mechanics and Engineering Physics Sciences*, **54**:4 (2013), 74–85 (In Russian)].

[10] Б. А. Худаяров, Н. Г. Бандурин, "Нелинейный флаттер вязкоупругих ортотропных цилиндрических панелей", *Матем. моделирование*, **17**:10 (2005), 79–86. [B. A. Khudayarov, N. G. Bandurin, "Nonlinear flutter of viscoelastic orthotropic cylindrical panels", *Mathematical Models*, **17**:10 (2005), 79–86 (In Russian)].

[11] Р. А. Абдикаримов, Д. А. Ходжаев, "Компьютерное моделирование задач динамики вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций переменной толщины", *Magazine of Civil Engineering*, **49**:5 (2014), 83–94. [Abdikarimov Rustamkhan Alimkhanovich, Khodjaev Dadakhan Akmarkhanovich, "Computer modeling of tasks in dynamics of viscoelastic thin-walled elements in structures of variable thickness", *Magazine of Civil Engineering*, **49**:5 (2014), 83–94 (In Russian)].

[12] А. М. Романенков, "О решениях уравнения малых поперечных колебаний движущегося полотна", *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*, **9**:2 (2022), 346–356; англ. пер.:A. M. Romanenkov, "On solutions of the equation of small transverse oscillations of a moving web", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, **55** (2022), 235–242.

Информация об авторе

Романенков Александр Михайлович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры 916 Математика, Московский авиационный институт, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: romanaleks@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0700-8465

Поступила в редакцию 27.07.2023 г.
Поступила после рецензирования 14.02.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the author

Alexandr M. Romanenkov , Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the 916 Mathematics Department, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation. E-mail:romanaleks@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0700-8465

Received 27.07.2023
Reviewed 14.02.2024
Accepted for press 11.03.2024